LA FONCTION CARRÉE ET LES FONCTIONS DU 2D DEGRÉ

I. Fonction carré

Vidéo https://youtu.be/B3mM6LYdsF8

1. Définition

La fonction carré f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

2. Variations

Propriété :
La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Démonstration :

- Soient a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.

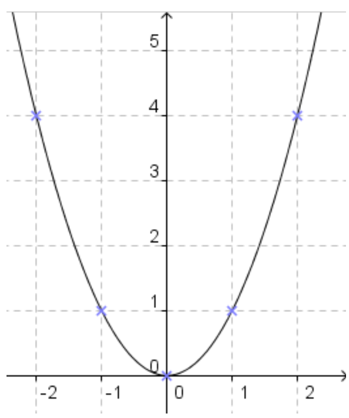
$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$.

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



Remarques :

1) Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carrée n'est donc pas une fonction linéaire.

2) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction carré est appelée une parabole de sommet O.

3) Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

II. Fonctions polynômes de degré 2

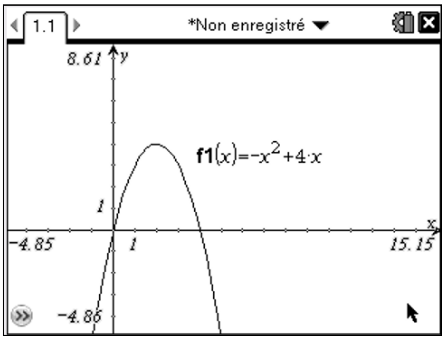
1. Définition

Une fonction polynôme de degré 2 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels donnés et $a \neq 0$.

Exemples :

- $f(x) = 5x^2 - 4x + 9$. On a : a = 5, b = -4 et c = 9.
- $g(x) = -x^2 + 4x$. On a : a = -1, b = 4 et c = 0.
- La fonction carré est une fonction polynôme particulière telle que : a = 1, b = 0 et c = 0.
- $h(x) = (3x+1)(x-2)$.
  En effet : $h(x) = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$.
  On a : a = 3, b = -5 et c = -2.

On peut tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme à l'aide de la calculatrice graphique. Il s'agit d'une **parabole**.

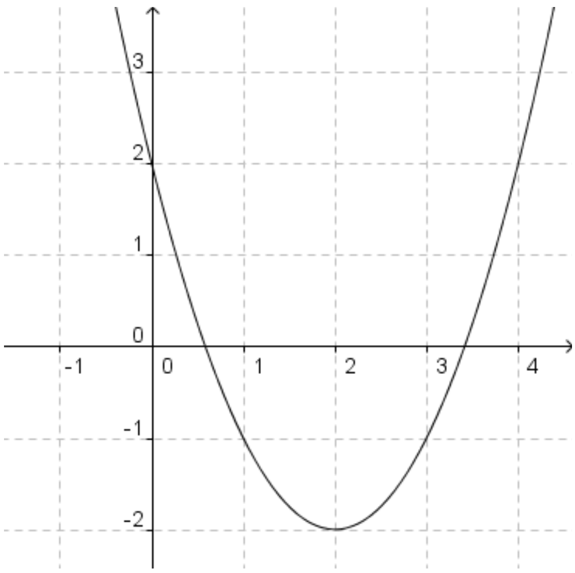


« *Jesus dit à ses disciples y^2 = 2px. Ils ne comprirent pas, c'était une parabole.* »
Citation apocryphe
Le mot vient du grec « parabolê » qui signifiait l'action de jeter à côté : « para » pour à côté et « bolein » pour jeter.

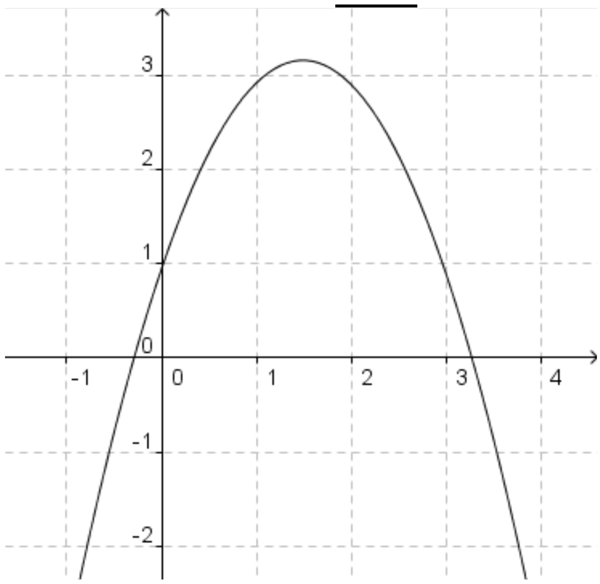
2. Variations

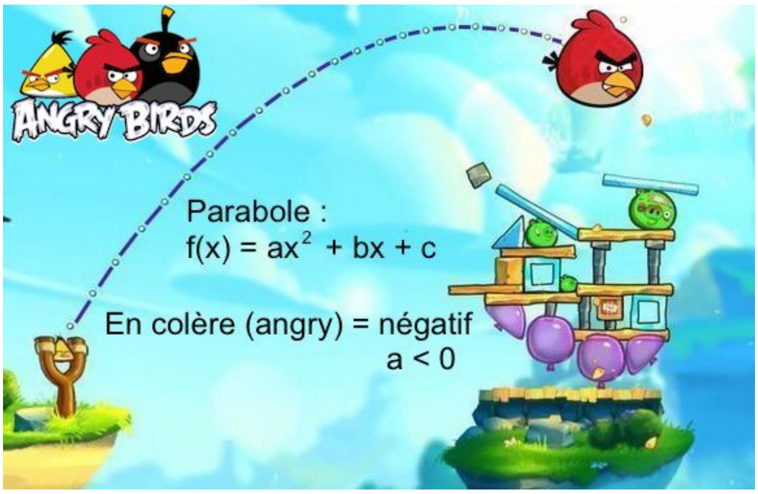
Propriétés :
Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante.
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante.

$a > 0$



$a < 0$





3. Extremum

La courbe représentative de f est une parabole qui admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition :
Le point de la courbe qui correspond au maximum ou au minimum est appelé le sommet de la parabole.

<u>Exemple :</u>
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$ admet un maximum.
En effet, le coefficient devant x^2 est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante.

<u>Propriété :</u>
Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Alors f admet un extremum pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

<u>Méthode :</u> Déterminer les coordonnées de l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2

Vidéo https://youtu.be/KgsQI1ksdbA

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.
a) Quelle est la nature de l'extremum de la fonction f ?
b) Déterminer les coordonnées de cet extremum.
c) Construire le tableau de variations de f, puis vérifier en traçant sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice.