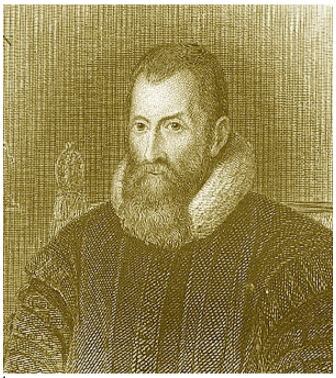
FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

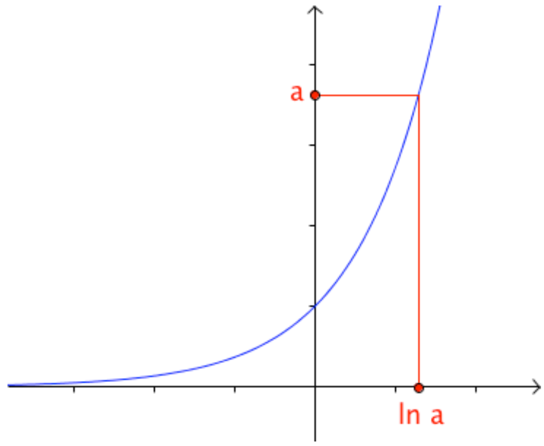


En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ».
Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.
Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).
Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de *Neper*.
Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.
L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (voir paragraphe II). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

I. Définition

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\left]0;+\infty\right[$.

Pour tout réel a de $\left]0;+\infty\right[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

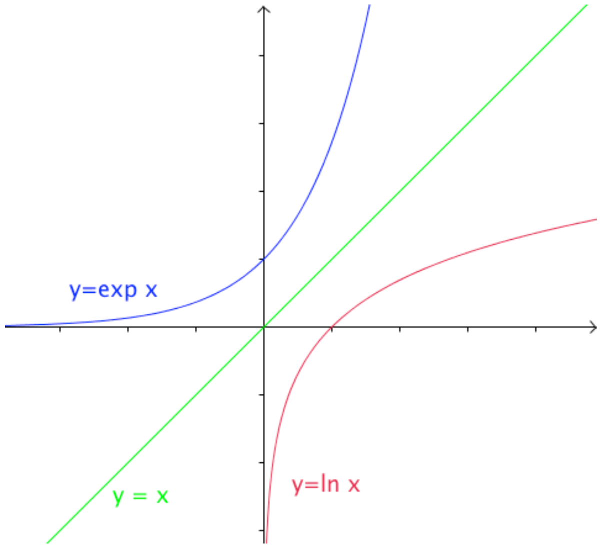


Définition : On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.
La fonction logarithme népérien, notée **ln**, est la fonction :

$$\ln : \left]0;+\infty\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

Exemple :
L'équation $e^x = 5$ admet une unique solution. Il s'agit de $x = \ln 5$.
A l'aide de la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée : $x \approx 1{,}61$.

Remarque :
Les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Conséquences :
a) $x = e^a$ est équivalent à $a = \ln x$ avec $x > 0$

b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$

c) Pour tout x, $\ln e^x = x$

d) Pour tout x strictement positif, $e^{\ln x} = x$

Démonstrations :

a) Par définition

b) - Car $e^0 = 1$
   - Car $e^1 = e$
   - Car $e^{-1} = \frac{1}{e}$

c) Si on pose $y = e^x$, alors $x = \ln y = \ln e^x$

d) Si on pose $y = \ln x$, alors $x = e^y = e^{\ln x}$

Exemples : $e^{\ln 2} = 2$ et $\ln e^4 = 4$

Propriété : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
a) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
b) $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

Démonstration :

a) $x = y \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\ln y} \Leftrightarrow \ln x = \ln y$

b) $x < y \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^{\ln y} \Leftrightarrow \ln x < \ln y$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéo https://youtu.be/lCT-8ijhZiE

Vidéo https://youtu.be/_fpPphstjYw

Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln x = 2$, $I =]0\,;+\infty[$ b) $e^{x+1} = 5$, $I = \mathbb{R}$ c) $3\ln x - 4 = 8$, $I =]0\,;+\infty[$

d) $\ln(6x-1) \geq 2$, $I = \left]\frac{1}{6}\,;+\infty\right[$ e) $e^x + 5 > 4e^x$, $I = \mathbb{R}$

II. Propriétés de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Démonstration :

$e^{\ln(x \times y)} = x \times y = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$

Donc $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

Ainsi, celui qui aurait à effectuer 36 x 62, appliquerait cette formule, soit :
log(36 x 62) = log(36) + log(62) ≈ 1,5563 + 1,7924 (voir table ci-contre)

L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement :
log(36 x 62) ≈ 3,3487

En cherchant dans la table, le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit : 36 x 62 = 2232.

x	$log(x)$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
…	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
…	
62	1,7924
…	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
…	

2) Formules

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

b) $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

c) $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

d) $\ln(x^n) = n\ln x$ avec n entier relatif

Démonstrations :

a) $\ln\frac{1}{x} + \ln x = \ln\left(\frac{1}{x} \times x\right) = \ln 1 = 0$

b) $\ln\frac{x}{y} = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y$

c) $2\ln\sqrt{x} = \ln\sqrt{x} + \ln\sqrt{x} = \ln\left(\sqrt{x} \times \sqrt{x}\right) = \ln x$

d) $e^{n\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^n = x^n = e^{\ln\left(x^n\right)}$

Donc $n\ln x = \ln\left(x^n\right)$

Exemples :

a) $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$ b) $\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 3 - \ln 4$ c) $\ln\sqrt{5} = \frac{1}{2}\ln 5$ d) $\ln 64 = \ln\left(8^2\right) = 2\ln 8$

Méthode : Simplifier une expression

Vidéo https://youtu.be/HGrK77-SCl4

$A = \ln\left(3-\sqrt{5}\right) + \ln\left(3+\sqrt{5}\right)$ $B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$ $C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$

Méthode : Résoudre une équation

Vidéo https://youtu.be/RzX506TFBIA

Vidéo https://youtu.be/m-LJjU7trXo

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6^x = 2$

2) Résoudre dans $\left]0;+\infty\right[$ l'équation : $x^5 = 3$

3) 8 augmentations successives de *t* % correspondent à une augmentation globale de 30 %. Donner une valeur approchée de *t*.

III. Etude de la fonction logarithme népérien

Vidéo https://youtu.be/3KLX-ScJmcl

1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $\left]0;+\infty\right[$.

- Admis -

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Démonstration :

Nous admettons que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$.

Posons $f(x) = e^{\ln x}$.

Alors $f'(x) = (\ln x)' e^{\ln x} = x(\ln x)'$

Comme $f(x) = x$, on a $f'(x) = 1$.

Donc $x(\ln x)' = 1$ et donc $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Exemple :

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

2) Variations

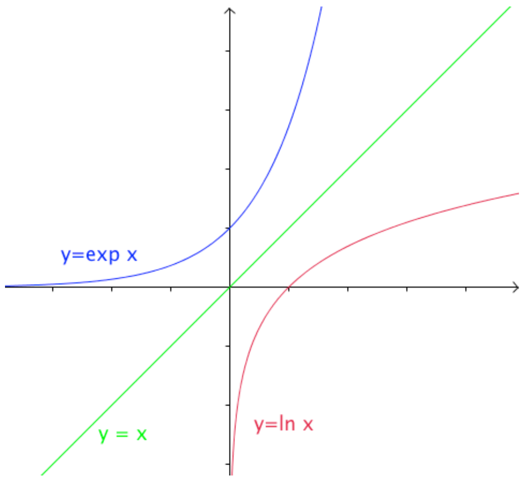
Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}>0$.

3) Limites aux bornes

Propriété : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$



On peut justifier ces résultats par symétrie de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

4) Tangentes particulières

Rappel : Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est :
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Dans le cas de la fonction logarithme népérien, l'équation est de la forme :
$y=\dfrac{1}{a}(x-a)+\ln a$.

- Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est $y=\dfrac{1}{1}(x-1)+\ln 1$ soit : $y=x-1$.
- Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est $y=\dfrac{1}{e}(x-e)+\ln e$ soit : $y=\dfrac{1}{e}x$.

5) Courbe représentative

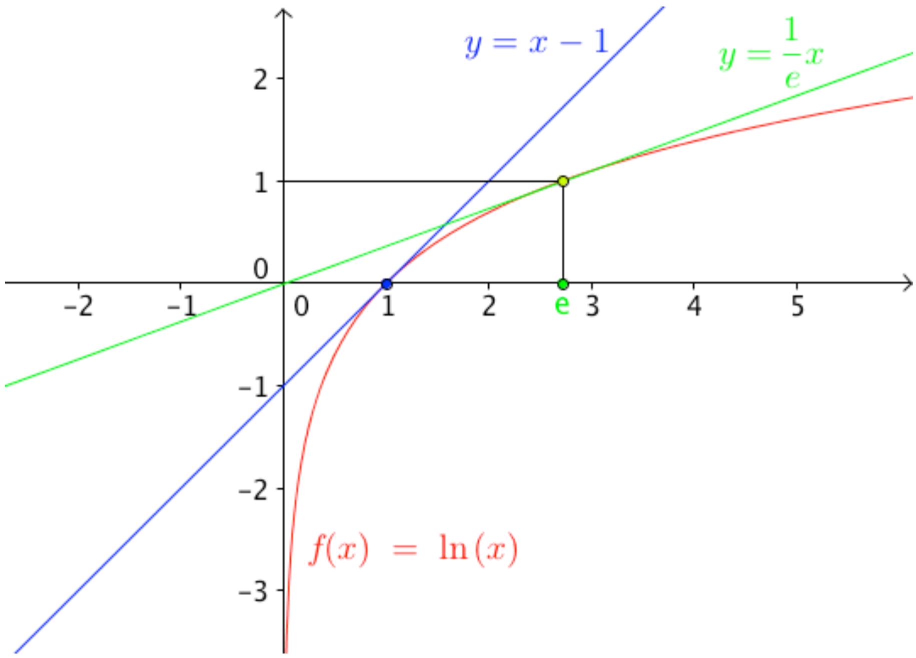
On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	||	$+$
$\ln x$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Valeurs particulières :

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$



Méthode : Etudier les variations d'une fonction

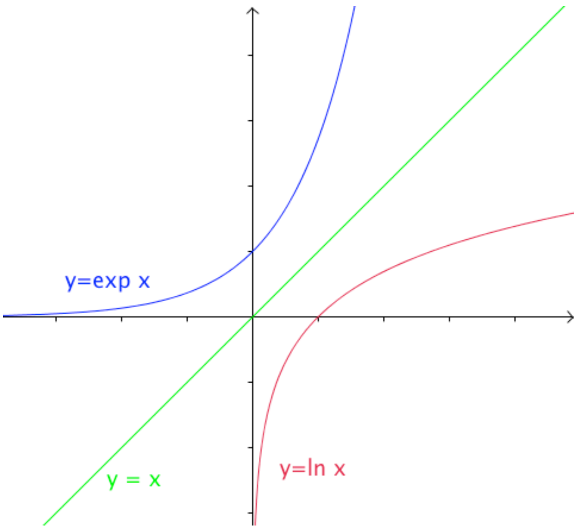
Vidéo https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln x$.

VI. Positions relatives

Vidéo https://youtu.be/RA4ygCI3ViE
Vidéo https://youtu.be/0hQnOs_hcss

Propriété : La courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de la droite d'équation $y = x$.
La droite d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.



Démonstration :
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$.
$f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow e^x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow e^x = 1$
$\Leftrightarrow x = 0$

On a également $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$.
On dresse ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

On en déduit que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = e^x - x > 0$ soit $e^x > x$

- On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.
On a également $g(1) = 1 - \ln 1 = 1 > 0$.

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	-	0	+	
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

On en déduit que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $g(x) = x - \ln x > 0$ soit $x > \ln x$.